

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 8

Pojam funkcije, grafa i inverzne
funkcije

Poglavlje 1

Funkcije

Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa f , svakom elementu x iz X pridružen točno jedan element y iz Y , kažemo da je na skupu X zadana funkcija f sa vrijednostima u Y . To simbolički označavamo sa $f : X \longrightarrow Y$.

Skup X nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije f , a skup Y *područje vrijednosti* ili *kodomena* od f . Vrijednost x zovemo ponekad *varijabla*. Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, kažemo da je f *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Podskup skupa Y ,

$$f(X) = \{y | y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije* f .

Graf realne funkcije realne varijable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$.

Zadatak 1 Izračunajte $f(-1), f(0), f(1), f(3)$ i $f(5)$ ako je $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.

Rješenje: Redom uvrštavamo zadane vrijednosti na mjesto varijable x u pravilu pa imamo:

$$\text{i) } f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$$

$$\text{ii) } f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\text{iii) } f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 3 + 2 - 5 = -5$$

Zadatak 2 Neka je $f(x) = 2x + 3$. Odredite:

$$(a) \quad f(-2), f(1) \text{ i } f\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$(b) \quad f(a^2),$$

(c) $f^2(a)$,

(d) $f(1) - f(-1)$ i $f(a^2 + 1) - f^2(a + 1)$.

Rješenje:

(b) $f(a^2) = 2a^2 + 3$

(c) $f^2(a) = (2a + 3)^2$

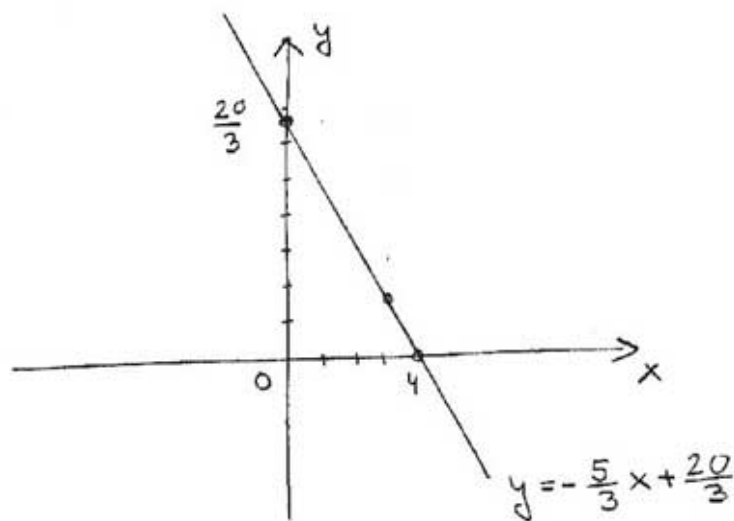
Zadatak 3 Odredite $f(0)$, $f(-1)$ i $\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ ako je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Funkcije oblika $f(x) = ax + b$ nazivamo linearne funkcije. Njihov je graf pravac $y = ax + b$.

Zadatak 4 Odredite linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ i nacrtajte njen graf ako je

(a) $f(-2) = 10$ i $f(1) = -5$,

(b) $f(-3) = 3$ i $f(b) = 0$.



Slika 1: graf funkcije $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$
je pravac

Rješenje:

(a) $f(-2) = 10 \Rightarrow a(-2) + b = 10$, $f(1) = -5 \Rightarrow a + b = -5$

Dakle, rješavamo sustav $-2a + b = 10$, $a + b = -5$ što daje $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{20}{3}$
pa je tražena funkcija $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$.

Zadatak 5 Odredite kvadratnu funkciju $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ako je:

- (a) $f(-1) = -1, f(3) = -3$ i $f(6) = 12$,
(b) $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$ i $f(2\sqrt{2}) = -7$.

Zadatak 6 Neka je dano pridruživanje:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 3x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Da li je f funkcija?

Rješenje: Dano pridruživanje nije funkcija jer po pravilu za interval $[0, 1]$ imamo $f(1) = 2$ a po pravilu za interval $[1, 2]$ slijedi da je $f(1) = 3$ što znači da su broju 1 pridružene dvije različite vrijednosti.

Zadatak 7 Izračunajte $f(x+1)$ ako je $f(x-1) = x^2$.

Rješenje: Problem je što umjesto $f(x)$ imamo zadano $f(x-1)$. Zato radimo supstituciju $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ pa dobivamo $f(t) = (t+1)^2$ iz čega slijedi da je $f(x+1) = (x+1+1)^2 = (x+2)^2$.

Funkcije mogu imati različita svojstva. Za funkciju $f : X \longrightarrow Y$ kažemo da je *injekcija* ako za bilo koja dva elementa $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili, ekvivalentno tome, ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Ako je $f(X) = Y$, tj. ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, kažemo da je f *surjekcija*. Za funkciju koja je istovremeno i surjekcija i injekcija, kažemo da je *bijekcija*.

Zadatak 8 Provjerite injektivnost sljedećih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

- (a) $f(x) = 3$, (b) $f(x) = 2x+1$, (c) $f(x) = 3x^2+1$, (d) $f(x) = x^3$.

Rješenje:

- (a) Ova funkcija očito nije injektivna jer je $f(x) = 3$ za svako x pa možemo npr. uzeti $x_1 = 1, x_2 = 2$ i imamo $f(x_1) = f(x_2)$ iako je $1 \neq 2$.
(b) Koristit ćemo drugi kriterij injektivnosti da pokažemo da je ova linearna funkcija injektivna. Želimo da iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Imamo

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

pa je to injektivna funkcija. Općenito vrijedi da su linearne funkcije injektivne.

- (c) Kako je $(-x)^2 = x^2$ lako ćemo naći primjer koji pokazuje da kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 1$ nije injektivna. Uzmemo $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ pa imamo $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ i s druge strane $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$. Jer je $1 \neq -1$ pokazali smo da funkcija nije injektivna.

Injektivnost funkcije se ponekad može postići restrikcijom domene.

Zadatak 9 *Restringirajte domenu slijedeći funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tako da one postanu injektivne:*

$$(a) \quad f(x) = x^2, \quad (b) \quad f(x) = |x + 1|, \quad (c) \quad f(x) = \sin x$$

Rješenje:

- (a) Ovdje možemo uzeti npr. samo pozitivne x -eve odnosno domenu sa $\mathbb{R}$ restringirati na $\mathbb{R}_+ = \{ x \geq 0 \mid x \in \mathbb{R} \}$. Sada imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

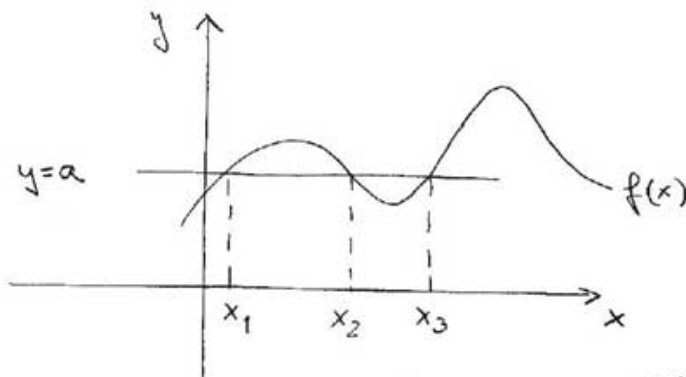
jer su x_1 i x_2 pozitivni pa $|x_1| = x_1$ i $|x_2| = x_2$.

Zadatak 10 *Neka je $f(x) = x^2 + 1$. Odredite Y tako da $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ bude surjekcija.*

Rješenje: Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ surjekcija onda za svako $y \in Y$ mora postojati $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$. To znači da je $y = x^2 + 1$. Jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ slijedi da je $y = x^2 + 1 \geq 1$. Prema tome, ako definiramo $Y = [1, +\infty)$ imamo surjektivnost jer u tom slučaju za dani y odgovarajući x ima oblik $\sqrt{y - 1}$.

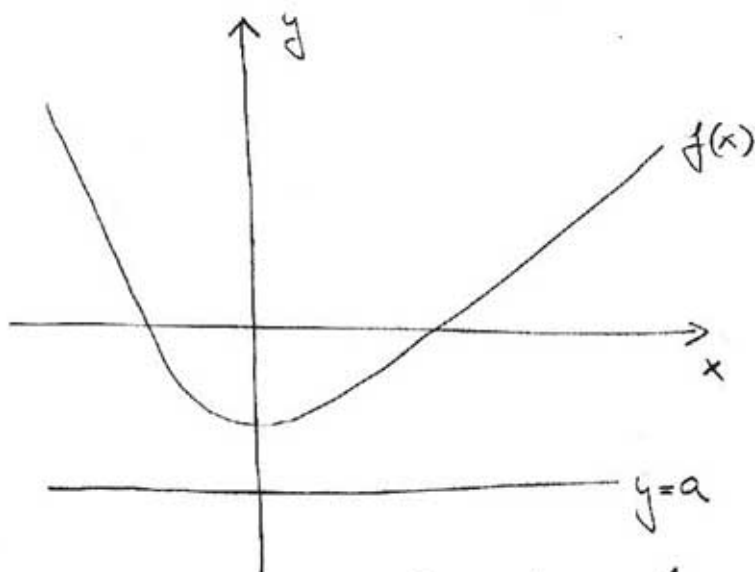
Surjektivnost i injektivnost se lako mogu vidjeti iz grafa funkcije:

- (i) injektivnost: povlačimo pravce paralelene s x -osi, tj. pravce oblika $y = b$. Ako graf funkcije presiječemo s nekim takvim pravcem u više od jedne točke to znači da funkcija nije injektivna. Naime, te točke presjeka imaju koordinate (x_1, b) i (x_2, b) gdje je $x_1 \neq x_2$. Jer leže na grafu slijedi da je $f(x_1) = f(x_2) = b$ (vidi sliku 2.)



Slika 2: graf funkcije koja nije injektivna; pravac $y=a$ siječe graf u tri točke pa $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$ dok je istovremeno $x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, x_1 \neq x_3$

- (ii) surjektivnost: ponovno povlačimo pravce paralelne s x -osi tj. one oblika $y = b$ za neko b . Ako nađemo b takav da je b u kodomeni Y zadane funkcije f , ali pravac $y = b$ ne siječe graf te funkcije, to znači da dana funkcija $f : X \rightarrow Y$ nije surjektivna. Naime, za taj $b \in Y$ nema odgovarajućeg $x \in X$ takvog da $f(x) = b$ jer bi inače pravac $y = b$ sijekao graf u točki $(x, f(x)) = (x, b)$. (vidi sliku 3.)



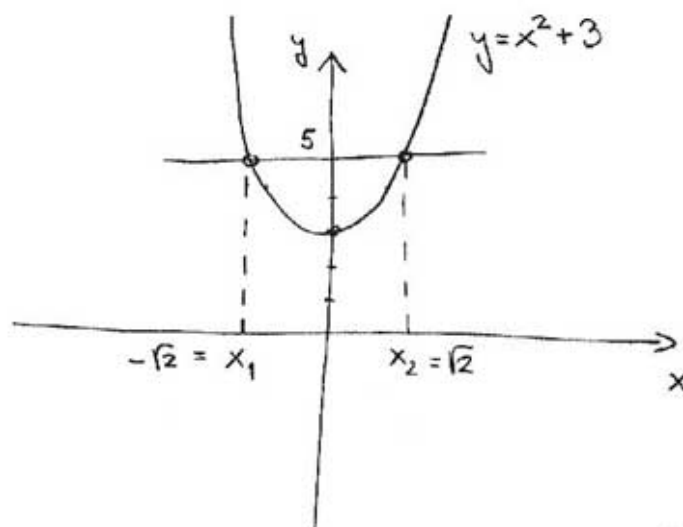
Slika 3: ako funkciju f gledamo kao funkciju sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, onda ona očito nije surjektivna jer pravac $y=a$ ne siječe njen graf $\Rightarrow$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ t.d. $f(x)=a$

Zadatak 11 Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost slijedećih funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^2 + 3$, (b) $f(x) = |x + 1|$, (c) $f(x) = x + 3$

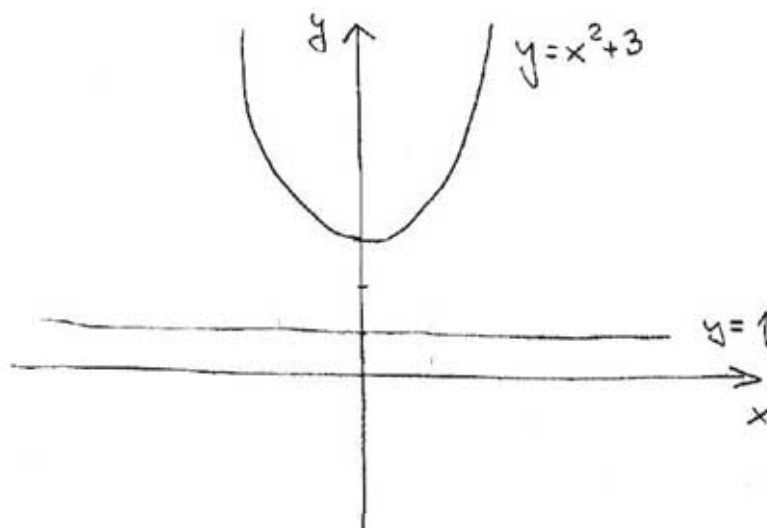
Rješenje:

- (a) Gledamo da li možemo naći pravac oblika $y = b$ koji bi sjekao naš graf u barem dvije točke, uzmemo npr. $y = 5$ i vidimo da funkcija nije injektivna.



Slika 4: različiti x_1 i x_2 sa svojstvom da $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ nije injektivna

Sada tražimo $y = b$ takav da ne siječe graf niti u jednoj točki, to je npr $y = 1$ pa f nije ni surjektivna.



Slika 5: pravac $y = 1$ nigdje ne siječe graf
pa f nije surjektivna

Neka su zadane dvije funkcije, $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y_1 \longrightarrow Z$ uz uvjet $Y \subset Y_1$. Funkcija koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje element $g(f(x)) \in Z$ zove se kompozicija funkcija f i g i označava sa $g \circ f$. Dakle, po definiciji je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada $f : X \longrightarrow Y$ bijekcija. Onda za svaki element $y \in f(X)$ postoji jedinstveni $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, f^{-1} . Funkcija $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ koja svakom elementu $y \in f(X)$ pridružuje $x \in X$ sa svojstvom da $f(x) = y$ zove se inverzna funkcija polazne funkcije f . Primjetimo da vrijedi:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i} \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

pa je

$$f^{-1} \circ f = id_X \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

Zadatak 12 Neka je $f(x) = x^3 - x$. Odredite:

$$(a) \quad f \circ f, \quad (b) \quad (f \circ (f \circ f))(-1).$$

Zadatak 13

- (i) Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. Da li vrijedi $f \circ g = g \circ f$? Za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?
- (ii) Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ i $h(x) = x^2 + 3$. Provjerite: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije f , g i h za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

Zadatak 14 Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju ako je

- (a) $f(x) = x^2 - 1$,
- (b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$,
- (c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$,
- (d) $f(x) = (5 + 3^x)^2$.

Rješenje:

- (a) Prvo trebamo odrediti područje na kojem je zadana funkcija bijektivna. Imamo $x^2 - 1 \geq -1$ pa ćemo kodomenu ograničiti na $[-1, +\infty)$. Ako domenu ograničimo na $x \geq 0$ imamo i injektivnost: $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ jer $|x| = x$ ako $x \geq 0$. Stoga promatramo $f : [0, +\infty) \longrightarrow [-1, +\infty)$ i tu se inverz dobiva na slijedeći način: stavimo $y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y + 1}$ pa je $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$. To je, zbog ograničenja kodomene na $[-1, +\infty]$ dobro definirano (vidi sliku).

- (b) Domena ove funkcije je $x > 0$ zbog svojstava logaritma. Iz istih razloga je kodomena čitav $\mathbb{R}$. Injektivnost imamo na čitavoj domeni jer $\log \frac{x_1}{2} = \log \frac{x_2}{2} \Rightarrow 10^{\log \frac{x_1}{2}} = 10^{\log \frac{x_2}{2}} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Znači, imat ćemo $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ i nalazimo je na sljedeći način: $y = \log \frac{x}{2} \Rightarrow 10^y = 10^{\log \frac{x}{2}} \Rightarrow 10^y = \frac{x}{2}$ pa $2 \cdot 10^y = x$ i konačno $f^{-1}(y) = 2 \cdot 10^y$.

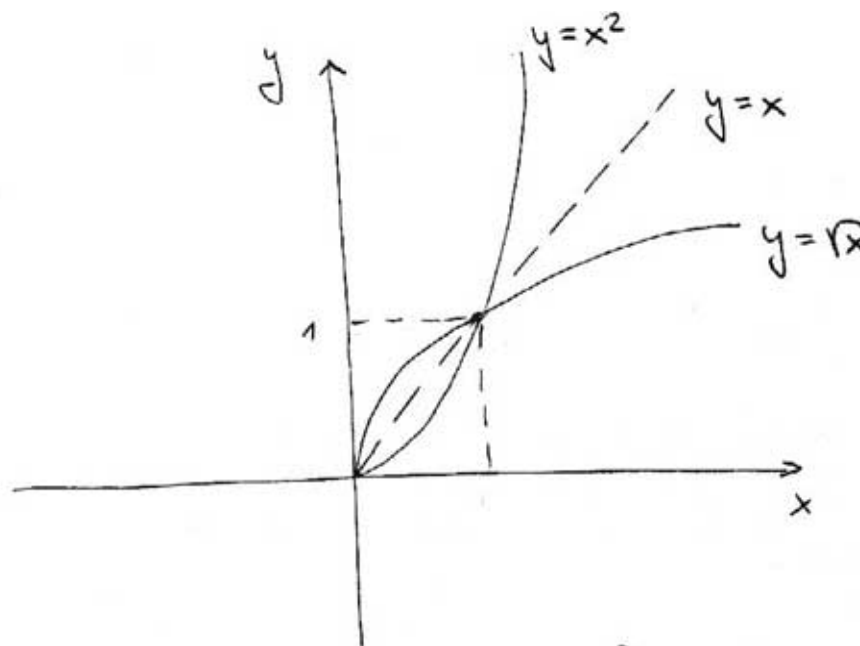
Graf inverzne funkcije dobijemo tako da preslikmo graf početne funkcije oko pravca $y = x$.

Zadatak 15 Nacrtajte graf inverzne funkcije ako je početna funkcija zadana s:

- (a) $f(x) = x^2$
 (b) $f(x) = -x + 1$
 (c) $f(x) = x^3 - 1$

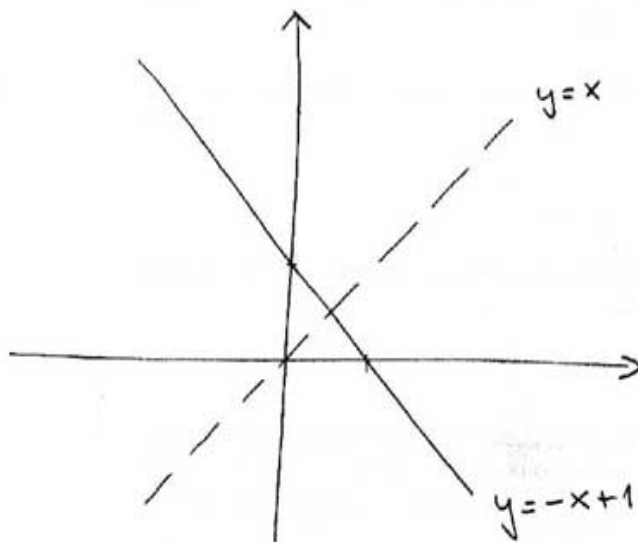
Rješenje:

- (a) Funkcija $f(x) = x^2$ bijektivna je ako joj npr. ograničimo domenu na $x \geq 0$ a kodomenu na $y \geq 0$. Tu je inverz dan sa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$:



Slika 6: parabolu $y = x^2$, $x \geq 0$ smo preslikali oko pravca $y = x$ i dobili graf inverzne funkcije $y = \sqrt{x}$

- (b) Linearne funkcije su sve bijektivne pa možemo odmah tražiti inverz:
 $y = -x + 1 \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow x = -y + 1$ i dobivamo $f^{-1}(y) = -y + 1$.
 Zaključujemo da je graf inverzne funkcije istovjetan grafu početne funkcije:



Slika 7: pravac $y = -x + 1$ se preslikava u
 oko pravca $y = x$ preslika sam u sebe pa
 zaključujemo da je inverzna funkcija od
 $f(x) = -x + 1$ upravo ona sama.

Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-l < x < l$ (ovdje $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$) nazivamo parnom ako je $f(-x) = f(x)$ i neparnom ako je $f(-x) = -f(x)$ za svako x iz domene od f .

Zadatak 16

Odredite parnost ili neparnost slijedećih funkcija:

- (a) $f(x) = x^2 - x^4$,
- (b) $f(x) = \sin(\cos x)$,
- (c) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$,
- (d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,
- (e) $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2) \sin x}$,
- (f) $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Rješenje:

- (a) Jednostavno uvrštavamo $-x$ umjesto x i imamo:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$$

što pokazuje da je funkcija parna.

- (b) $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$

i vidimo da je f parna funkcija jer je $\cos$ paran.

- (c) $f(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2} = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -(-\sqrt{1 - x + x^2} + \sqrt{1 + x + x^2}) = -f(x)$
pa je f neparna funkcija.

Parnost ili neparnost se isto može isčitati iz grafa funkcije; graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os y , a graf neparne dobijemo tako da nacrtamo funkciju na području $x \geq 0$, preslikamo dobiveno prvo oko osi y pa onda oko osi x (vidi sliku)

Zadatak 17 Odredite pomoću grafa parnost ili neparnost sljedećih funkcija

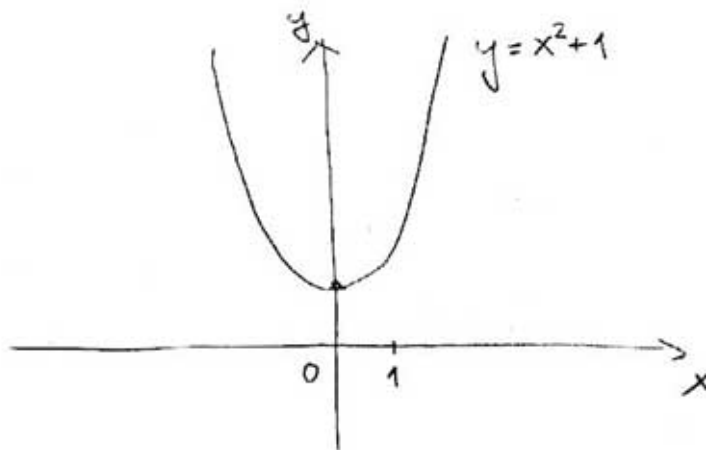
(a) $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \sin x$

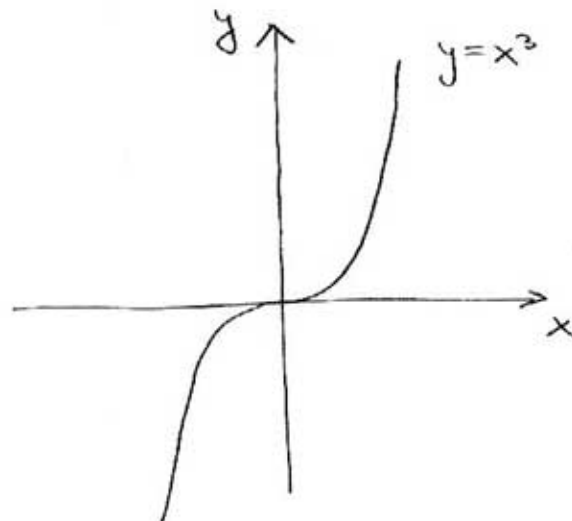
Rješenje:

- (a) Graf je očito simetričan s obzirom na os y (vidi sliku) pa zaključujemo da je funkcija parna.



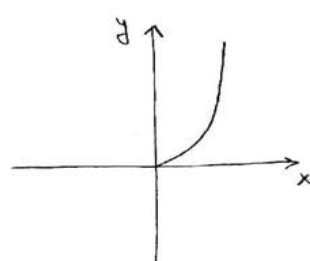
Slika 8

(b) Graf funkcije $f(x) = x^3$:

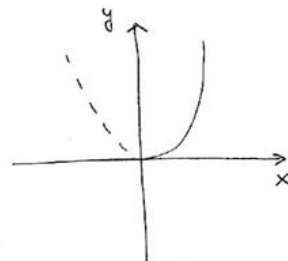


Slika 9

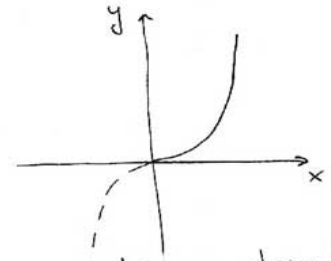
Iz slike je jasno da dio grafa za $x < 0$ možemo dobiti tako da graf za $x \geq 0$ preslikamo oko osi y pa zatim oko osi x . Stoga je to neparna funkcija.



$f(x) = x^3$ i $x \geq 0$



simetrija s obzirom na os y



simetrija s obzirom na os x gdje graf